

## Anwendungsaufgaben zu den gebrochenrationalen Funktionen

1.0 Zur Unterstützung der Stromversorgung einer Gemeinde wird in der Zeit von 12.00 Uhr bis 18.00 Uhr ein kleines Wasserkraftwerk zugeschaltet. Durch unterschiedlichen

Wasserdurchfluss in  $\text{m}^3$  pro Minute ( $\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ ) kann die Stromabgabe an den Energiebedarf

der Gemeinde angepasst werden. Der Wasserdurchfluss an einem bestimmten Tag wird in Abhängigkeit von der Tageszeit annähernd durch den Funktionsterm

$w(t) = 60 \cdot \frac{t+360}{2t+180}$  beschrieben. Dabei bedeutet  $t$  die Zeit in Minuten (min) von

12.00 Uhr bis 18.00 Uhr, d.h.  $D_w = [0; 360]$ .

Auf die Mitführung von Einheiten kann verzichtet werden. (Abitur 2008 AI)

1.1 Berechnen Sie den Wasserdurchfluss um 13.00 Uhr und um 15.00 Uhr.

1.2 Ermitteln Sie, um welche Uhrzeit im betrachteten Zeitraum der Wasserdurchfluss und damit die Stromerzeugung des Elektrizitätswerkes am größten ist.

1.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $w$  in ein geeignetes Koordinatensystem.

(Maßstab:  $t$ -Achse: 1 cm = 30 min;  $w$ -Achse: 1 cm =  $10 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ )

2.0 Die Herstellungskosten  $k(x)$  (in Euro) pro Gerät eines bestimmten Plasma-Fernsehgerätes in Abhängigkeit von der Stückzahl  $x$  können durch die reelle Näherungsfunktion mit dem

Funktionsterm  $k(x) = \frac{1100x+120000}{2x+3}$  für  $x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 50$  beschrieben werden.

(Abitur 2010 AII)

2.1 Berechnen Sie die Herstellungskosten pro Fernsehgerät bei 100 bzw. 1000 produzierten Fernsehgeräten und die Stückzahl, ab der die Herstellungskosten pro Gerät unter 600 € liegen.

2.2 Zeigen Sie, dass sich die Herstellungskosten eines Gerätes mit wachsender Stückzahl immer mehr verringern.

(Zur Kontrolle:  $k'(x) = \frac{-236700}{(2x+3)^2}$ )

2.3 Ermitteln Sie  $k'(100)$  und  $k'(1000)$  und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.

2.4 Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow \infty} k(x)$  und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

2.5 Zeichnen Sie den Graphen  $G_k$  von  $k$  und seine Asymptote für  $x \in [50; 1200]$  unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem.

3.0 Der Sauerstoffgehalt  $S$  von Gewässern, der in mg/l (Milligramm pro Liter) angegeben wird, lässt Rückschlüsse auf den Fischbestand der Gewässer zu. Ertragreiche Fischgewässer haben einen Sauerstoffgehalt von mehr als 6 mg/l. Dieser hängt unter anderem von der Wassertemperatur und dem Grad der Verunreinigung des Wassers ab. Ein Bach wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  durch Einleiten von organischen Abfällen an einer Stelle verunreinigt. Bei annähernd konstanter Temperatur beschreibt folgende Funktion modellhaft den Sauerstoffgehalt in der Nähe der Einleitungsstelle in den Tagen nach der

$$\text{Verunreinigung: } S : t \mapsto S(t) = \frac{-36t}{t^2 + 16} + 6 \quad (t \geq 0 \text{ in Tagen})$$

Bei den Rechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. (Abitur 2014 AI)

3.1 Geben Sie den Sauerstoffgehalt  $S$  zu Beginn der Schadstoffeinleitung an und ermitteln Sie den Wert, auf den sich  $S$  langfristig einstellen wird.

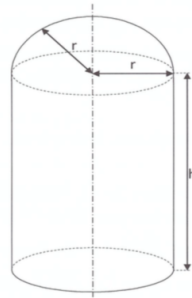
3.2 Ermitteln Sie die Zeitintervalle, in denen der Sauerstoffgehalt steigt bzw. fällt und bestimmen Sie damit die Koordinaten des Extrempunktes von  $S$ . Interpretieren Sie die Koordinaten des Extrempunktes im Sachzusammenhang.

$$\text{(Zur Kontrolle: } \dot{S}(t) = 36 \cdot \frac{t^2 - 16}{(t^2 + 16)^2} \text{ )}$$

3.3 Zeichnen Sie den Verlauf des Sauerstoffgehaltes für die ersten 12 Tage in ein geeignetes Koordinatensystem.

3.4 Unterhalb eines Wertes von 3 mg/l können Fische nicht überleben. Untersuchen Sie rechnerisch, ab welchem Zeitpunkt ein Fischsterben wegen Sauerstoffmangel zu erwarten ist und ab welchem Zeitpunkt der Sauerstoffgehalt ein Überleben der Fische wieder ermöglicht.

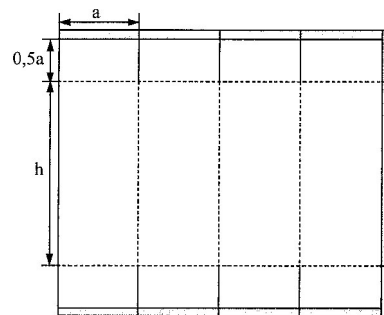
- 4.0 In hochwertige Edelstahlfläschchen sollen jeweils  $100 \text{ cm}^3$  Parfüm abgefüllt werden. Die Form des Fläschchens ist durch einen geraden Kreiszylinder mit einer oben aufgesetzten Halbkugel vorgegeben. Die Aussparung für den Sprühkopf wird nicht berücksichtigt. Für die Oberfläche  $O$  (in  $\text{cm}^2$ ) des Fläschchens in Abhängigkeit von seinem Radius  $r$  (in  $\text{cm}$ ) erhält man die Funktionsgleichung  $O(r) = \frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{200}{r}$  mit der Definitionsmenge  $D_o = ]0;3,5]$ . Auf die Mitführung von Einheiten wird verzichtet. Runden Sie gegebenenfalls Ihre Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma. (Abitur 2018 AI)



- 4.1 Bestimmen Sie das Verhalten von  $O(r)$  für  $r \rightarrow 0$ .
- 4.2 Berechnen Sie den Radius  $r$ , für den die Oberfläche  $O$  den absolut kleinsten Wert annimmt und bestätigen Sie, dass  $O_{\min} \approx 112,23 \text{ (cm}^2\text{)}$  gilt.
- 4.3 Erstellen Sie für  $1 \leq r \leq 3,5$  eine Wertetabelle mit der Schrittweite  $\Delta r = 0,5$ . Zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $O$  in ein Koordinatensystem im angegebenen Bereich. Wählen Sie hierfür einen geeigneten Maßstab.
- 4.4 Der Parfümhersteller möchte aus optischen Gründen den Radius  $r = 2 \text{ (cm)}$  wählen. Berechnen Sie dafür den Mehrbedarf an Edelstahlblech im Vergleich zu  $O_{\min}$  in Prozent. Begründen Sie stichhaltig, dass für alle Radien mit  $r \in [2;3,5]$  weniger als 10% Mehrbedarf an Blech im Vergleich zu  $O_{\min}$  benötigt werden.

5.0 Häufig werden Getränke in quaderförmige Behälter abgefüllt, deren Grundfläche ein Quadrat mit der Seitenlänge  $a$  ist und deren Höhe mit  $h$  bezeichnet wird. Ein solcher Behälter wird aus einem rechteckigen Stück Karton, wie es nebenstehend skizziert ist, hergestellt. Zunächst wird dazu ein an beiden Enden offener Quader gefaltet. Dann werden aus den überstehenden Stücken der Boden und das Oberteil gefalzt. Aus Stabilitätsgründen werden durch den grau dargestellten Streifen der Breite  $1,0\text{ cm}$  Überlappungen erzeugt.

Es soll ein Behälter mit dem Volumen  $V = 1000\text{ cm}^3$  hergestellt werden, für den der Materialverbrauch, d.h. der Flächeninhalt des skizzierten Kartons, minimal ist. Die Größen  $a$  und  $h$  sollen dabei die Einheit  $\text{cm}$  haben; bei den folgenden Berechnungen soll auf die Mitführung der Einheiten jedoch verzichtet werden. (Abitur 2005 AI)



5.1 Zeigen Sie, dass für den in Abhängigkeit von  $a$  dargestellten Flächeninhalt  $F(a)$  des

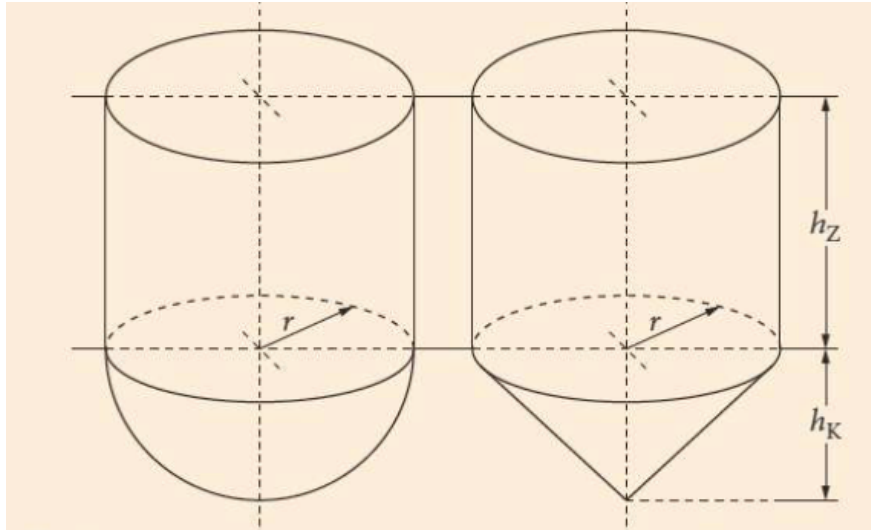
skizzierten Kartons gilt:  $F(a) = 4a^2 + 9a + 2 + \frac{4000}{a} + \frac{1000}{a^2}$  mit  $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ .

5.2 Zeigen Sie, dass der Ansatz  $\frac{dF(a)}{da} = 0$  zu folgender Gleichung führt:

$$8a^4 + 9a^3 - 4000a - 2000 = 0$$

5.3 Zeigen Sie unter der Annahme, dass es keine weitere positive Lösung dieser Gleichung gibt (Nachweis nicht erforderlich), dass für  $a \approx 7,75$  der Flächeninhalt  $F(a)$  seinen absolut kleinsten Wert annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall auch die Höhe  $h$  des Behälters sowie die Abmessungen des skizzierten Kartons.

6.0 Ein Silo aus Edelstahl für die chemische Industrie soll ein Volumen von  $100 \text{ m}^3$  besitzen. In der Konstruktionsabteilung werden die Form eines Kreiszyinders mit unten aufgesetzter Halbkugel bzw. eine Alternative mit unten aufgesetztem Kegel, wobei  $h_K = r$  gilt, näher untersucht. Das Silo wird mit einem kreisförmigen, ebenen Deckel verschlossen.

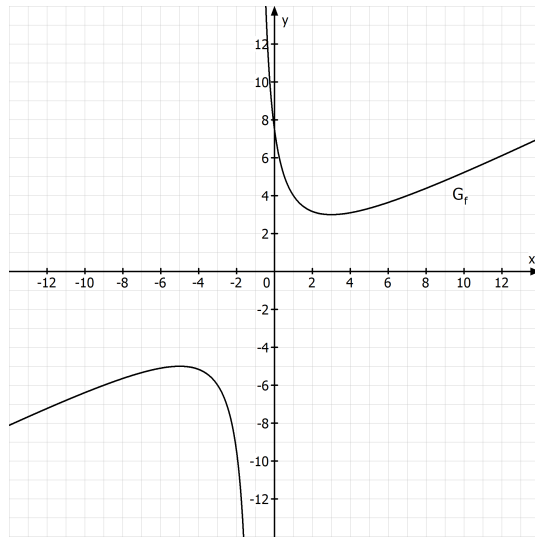


6.1 Entscheiden Sie, bei welchem der beiden Konstruktionsvorschläge weniger Edelstahlblech benötigt wird.

6.2 Die Herstellung der Halbkugel bzw. des Kegels ist jeweils doppelt so teuer wie die Herstellung des Zylindermantels und des Deckels. Bestimmen Sie die Herstellungskosten  $K$  in Abhängigkeit des Radius  $r$  und den Radius  $r_{\text{neu}}$ , so dass für die Herstellung des Silos möglichst geringe Kosten entstehen.

7.0 Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$  mit der Definitionsmenge  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen  $G_f$  von  $f$ :



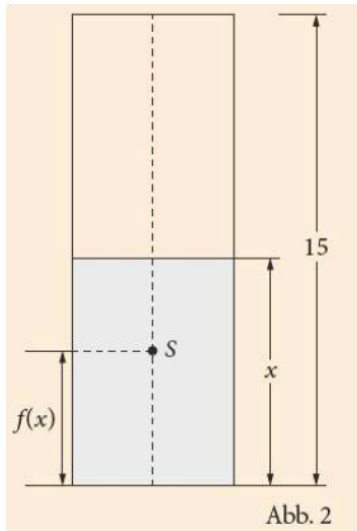
7.1 Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von  $G_f$  an und zeigen Sie rechnerisch, dass  $G_f$  seine schräge Asymptote nicht schneidet.

Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art der Extrempunkte von  $G_f$ .

7.2 Die Abbildung legt die Vermutung nahe, dass  $G_f$  bezüglich des Schnittpunktes  $P(-1|-1)$  seiner Asymptoten symmetrisch ist. Zum Nachweis dieser Symmetrie von  $G_f$  kann die

Funktion  $g$  mit  $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{8}{x}$  betrachtet werden, deren Graph aus  $G_f$  durch Verschiebung um 1 in positive  $x$ -Richtung und um 1 in positive  $y$ -Richtung hervorgeht. Weisen Sie die Punktsymmetrie von  $G_f$  nach, indem Sie zeigen, dass der Graph von  $g$  punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.

- 7.3.0 Eine vertikal stehende Getränkedose hat die Form eines geraden Zylinders. Die Lage des gemeinsamen Schwerpunktes  $S$  von Dose und enthaltener Flüssigkeit hängt von der Füllhöhe der Flüssigkeit über dem Dosenboden ab. Ist die Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 15 cm. Die bisher betrachtete Funktion  $f$  gibt für  $0 \leq x \leq 15$  die Höhe von  $S$  über dem Dosenboden in Zentimeter an. Dabei ist  $x$  die Füllhöhe in cm (vgl. Abbildung 2).



- 7.3.1 Berechnen Sie  $f(0)$  und  $f(15)$  und interpretieren Sie die beiden Ergebnisse im Sachzusammenhang.
- 7.3.2 Die zunächst leere Dose wird langsam mit Flüssigkeit gefüllt bis die maximale Füllhöhe von 15 cm erreicht ist. Beschreiben Sie mithilfe von Abbildung 2 die Bewegung des Schwerpunktes  $S$  während des Füllvorgangs. Welche Bedeutung im Sachzusammenhang hat die Tatsache, dass die  $x$ -Koordinate und  $y$ -Koordinate des Tiefpunktes von  $G_f$  übereinstimmt.
- 7.3.3 Bestimmen Sie, für welche Füllhöhen  $x$  der Schwerpunkt  $S$  höchstens 5 cm hoch liegt. Beantworten Sie zunächst diese Frage zunächst näherungsweise mithilfe von Abbildung 1 und anschließend durch Rechnung.
- 8.0 Ein Unternehmen stellt Tauchroboter in Einzelanfertigung für die Tiefseeforschung her und kalkuliert mit der Stückkostenfunktion  $k$  mit  $k(x) = \frac{ax + 100000}{0,5x + b}$ , wobei  $x \geq 0$  gilt.
- 8.1 Die Stückkosten betragen bei einer Produktionsmenge von 10 Tauchrobotern 17500 € und bei einer Menge von 20 Tauchrobotern 15000 €. Bestimmen Sie die Werte der Parameter  $a$  und  $b$ . (Teilergebnis:  $a = 5312,50$   $b = 3,75$ )
- 8.2 Berechnen Sie die Mindestanzahl der Tauchroboter, die gefertigt werden müssen, so dass die Stückkosten unter 12000 € fallen. Ermitteln Sie, wie sich die Stückkosten bei immer größeren Produktionsmengen entwickeln.
- 8.3 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktion  $k$  und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

8.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $k$  in ein geeignetes Koordinatensystem.

8.5 Es werden 300 Tauchroboter hergestellt, die sich zu einem Stückpreis von 15000€ verkaufen lassen.

Ermitteln Sie den Gewinn unter der Annahme, dass die gesamte Produktion verkauft wird.

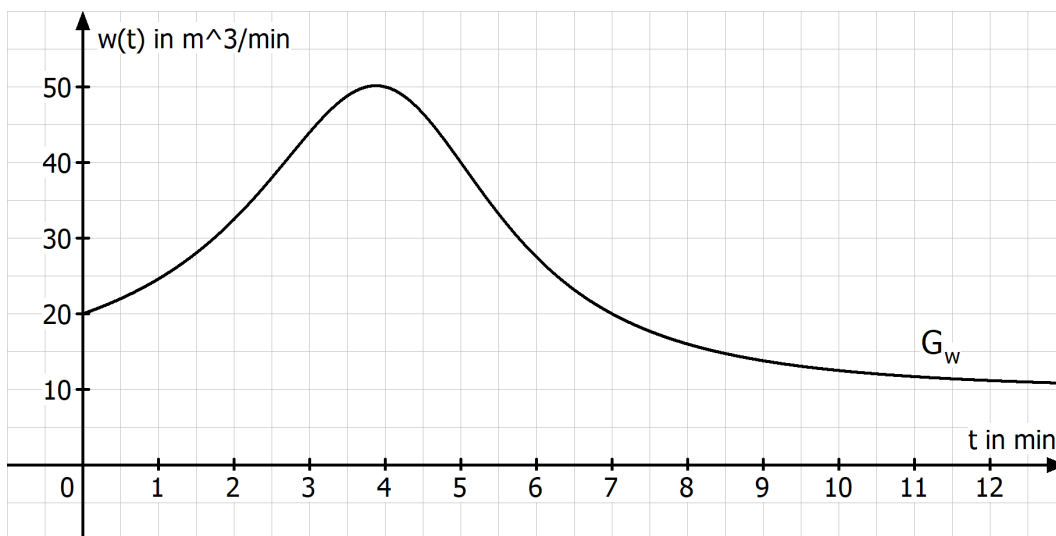
Bestimmen Sie, wie viele der 300 produzierten Roboter mindestens verkauft werden müssen, damit für das Unternehmen Gewinn entsteht.

8.6 Das Unternehmen produziert und verkauft 300 Tauchroboter und will mindestens 500000 € Gewinn erzielen. Bestimmen Sie für diese Situation den geringstmöglichen Verkaufspreis.

8.7 Der Verkaufspreis soll auf 11000 € abgesenkt werden. Berechnen Sie die Stückzahl, die mindestens produziert und verkauft werden muss, damit das Unternehmen Gewinn erwirtschaftet.

9.0 Die Funktion  $w$  mit  $w(t) = \frac{10(t^2 - 9t + 40)}{t^2 - 8t + 20}$  mit  $t \geq 0$  beschreibt die zeitliche Entwicklung

des Wasserdurchflusses eines Bachs an einer Messstelle. Unter Wasserdurchfluss versteht man dabei das Volumen des Wassers, das an dieser Stelle pro Minute vorbeifließt.



9.1 Ermitteln Sie den Wasserdurchfluss zwei Minuten nach Beobachtungsbeginn und für  $t \rightarrow \infty$ .

9.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunktes und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.

9.3 Berechnen Sie die  $t$ -Koordinaten der Wendepunkte mit einem digitalen Hilfsmittel und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.



9.4 Bestimmen Sie  $\int_0^8 w(t)dt$  näherungsweise mithilfe des Diagramms und deuten Sie den Wert des bestimmten Integrals im Sachzusammenhang.

10.0 In einen See wurde Abwasser eingeleitet. Dadurch sinkt der Sauerstoffgehalt des Sees. Selbstreinigungseigenschaften von Pflanzen im See bewirken schließlich eine Erhöhung des Sauerstoffgehalts. Die Funktion  $s$  mit der Gleichung  $s(t) = \frac{10(t^2 - t + 6)}{t^2 + 6}$  mit  $D_s = \mathbb{R}_0^+$  beschreibt näherungsweise den Sauerstoffgehalt des Sees. Dabei steht  $t$  für die Anzahl der seit Einleitung des Abwassers vergangene Tage und  $s(t)$  für den Sauerstoffgehalt in  $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ .

10.1 Geben Sie  $s(0)$  an und interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang.

10.2 Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen der Sauerstoffgehalt seinen kleinsten Wert erreicht hat und bestimmen Sie diesen Wert.

10.3 Berechnen Sie die Wendestelle  $t_w$  der Funktion  $s$  für  $t > 0$ .

Ermitteln Sie die Differenz  $s(t_w + 0,5) - s(t_w - 0,5)$  und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

10.4 Ermitteln Sie, nach wie vielen Tagen der Sauerstoffgehalt wieder auf 90 % des ursprünglichen Wertes angestiegen ist.

11.0 Die folgende Tabelle gibt die Entwicklung der Anzahl der verkauften Bücher eines Bandes wieder. Immer am Ende einer vollen Woche werden die Verkaufszahlen beim Verlag dokumentiert. Dabei bezeichnet  $t$  die Anzahl der Wochen ab Verkaufsstart ( $t = 0$ ) und  $n(t)$  die Anzahl der verkauften Bücher pro Woche in Tausend. Aufgrund eines einwöchigen Vorbestellungszeitraums werden beim Verkaufsstart bereits 26800 Bücher und nach einer Woche weitere 30000 verkauft. (Abitur 2023 AI)

$t$	0	1	2	3	4	5	8	10
$n(t)$	26,8	30,0	32,3	35,0	37,5	39,5	37,6	33,2

11.1 Stellen Sie die Zuordnung  $t \mapsto n(t)$  in einem geeigneten Koordinatensystem grafisch dar. Verbinden Sie die Punkte zu einer glatten Kurve und formulieren Sie eine Hypothese, wie sich die Verkaufszahlen nach der 10. Woche verhalten werden.

11.2.0 Ausgehend von den Tabellenwerten wird für die Anzahl  $v(t)$  der wöchentlich verkauften Bücher in Tausend ein mathematisches Modell mit folgender

Zuordnungsvorschrift  $v: t \mapsto \frac{3000}{t^2 - 12t + 111}$  mit  $t \in \mathbb{R}$  und  $t \geq 0$  entwickelt.

Mit der Funktion  $v$  sollen Prognosen angestellt werden, die über die 10. Woche hinausgehen.

11.2.1 Das Modell wird als aussagekräftig und realitätsnah eingestuft, wenn die tatsächlichen Werte von den berechneten um weniger als 5% abweichen. Zur Überprüfung werden in der folgenden Tabelle die beiden Hilfsfunktionen  $u$  und  $o$  herangezogen mit  $u(t) = 0,95 \cdot v(t)$  bzw.  $o(t) = 1,05 \cdot v(t)$ .

t	0	1	2	3	4	5	8	10
u(t)	25,7	28,5	31,3	33,9	36,1	37,5	36,1	31,3
n(t)	26,8	30,0	32,3	35,0	37,5	39,5	37,6	33,2
o(t)								

Ergänzen Sie die fehlenden Werte in obenstehender Tabelle und beurteilen Sie, ob die Funktion  $v$  als realitätsnah bezeichnet werden kann.

11.2.2 Ermitteln Sie, in der wievielten Woche nach dem Modell die Verkaufszahl 4000 Bücher pro Woche beträgt.

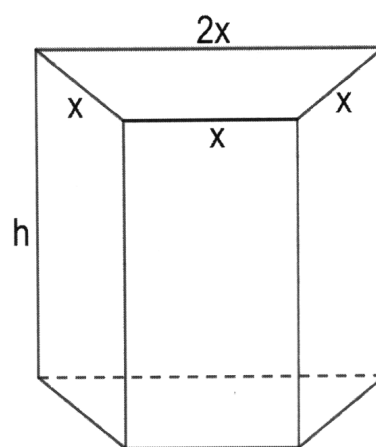
11.2.3 Berechnen Sie die Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes des Graphen der Funktion  $v$ . Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

(mögliches Teilergebnis:  $v(t) = -\frac{6000(t-6)}{(t^2 - 12t + 111)^2}$ )

12.0 Eine neue Sorte Pralinen soll mit ansprechender Verpackung auf den Markt kommen. Diese hat die nebenstehend abgebildete Form eines geraden Prismas mit trapezförmiger Grundfläche. Das Volumen der Verpackungsschachtel beträgt  $400 \text{ cm}^3$ . Die Maßzahl  $A$  der Oberfläche der oben offenen Schachtel in  $\text{cm}^2$  lässt sich in Abhängigkeit von der Länge  $x$  in cm (siehe nebenstehende Abbildung) durch die Gleichung

$$A(x) = \frac{3}{4}\sqrt{3} \cdot x^2 + \frac{8000\sqrt{3}}{9x} \text{ mit } 2 \leq x \leq 20 \text{ darstellen.}$$

Auf die Mitführung der Einheiten kann bei den folgenden Rechnungen verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse falls nicht anders gefordert auf zwei Nachkommastellen. (Abitur 2024 AI)



12.1 In Bild 1 ( $x = 11,37$ ) und Bild 2 ( $x = 6,00$ ) sind zwei mögliche Verpackungsschachteln mit einem Volumen von  $400 \text{ cm}^3$  nicht maßstäblich dargestellt. Zeigen Sie, dass beide Schachteln ganzzahlig gerundet den gleichen Oberflächeninhalt haben.

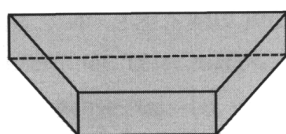


Bild 1

Beide Schachteln verursachen die gleichen Herstellungskosten. Nennen Sie zwei Kriterien, die bei der Entscheidung für eine der beiden Verpackungsschachteln ausschlaggebend sein können.

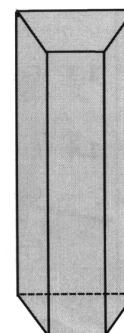


Bild 2

12.2 Aus Umweltschutzgründen soll die Verpackung eine möglichst geringe Oberfläche  $A$  haben. Ermitteln Sie die Länge  $x$  in cm so, dass  $A(x)$  für  $2 \leq x \leq 20$  minimal ist und berechnen Sie die Maßzahl des minimalen Oberflächeninhalts.

(mögliches Teilergebnis:  $A'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot x - \frac{8000\sqrt{3}}{9x^2}$ )

12.3 Zeichnen Sie den Graphen  $G_A$  der Funktion  $A$  für  $2 \leq x \leq 20$  in ein geeignetes Koordinatensystem. Kennzeichnen Sie am Graphen  $G_A$  die Punkte  $P_1(6 | A(6))$  und  $P_2(11,37 | A(11,37))$ . Geben Sie die Koordinaten des absoluten Hochpunktes von  $G_A$  an.

12.4 Ein Süßwarenhersteller entscheidet sich für eine Schachtel mit  $x = 8$  cm bei einem Volumen von  $400 \text{ cm}^3$ . Berechnen Sie die Flächenmaßzahl des trapezförmigen Bodens und die Höhe  $h$  der zugehörigen Schachtel.

## Lösungen

1.1  $w(60) = 84 \text{ m}^3 / \text{min}$      $w(180) = 60 \text{ m}^3 / \text{min}$

1.2

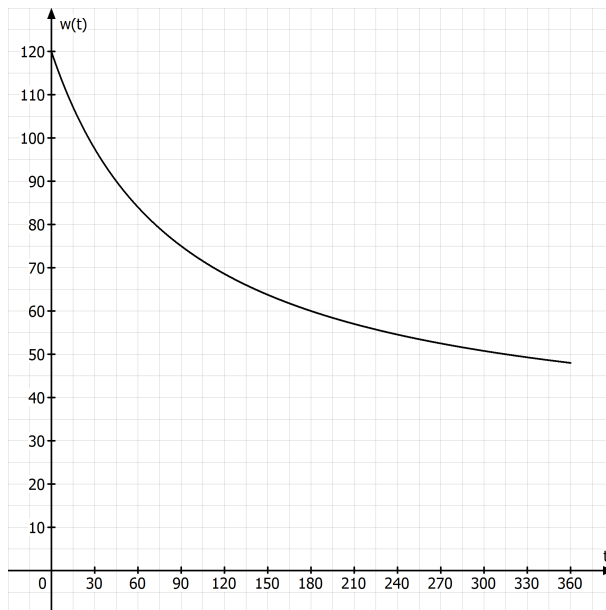
$$w'(t) = 60 \cdot \frac{1 \cdot (2t+180) - (t+360) \cdot 2}{(2t+180)^2} = 60 \cdot \frac{-540}{(2t+180)^2}$$

$w(t)$  ist für alle  $t \in D_w$  negativ

$\Rightarrow w$  ist für alle  $t \in D_w$  streng monoton abnehmend

$\Rightarrow$  absolutes Maximum bei  $t = 0$ , d.h. um 12.00 Uhr

1.3



2.1

$$k(100) \approx 1133 \quad k(1000) \approx 609$$

$$\frac{1100x + 120000}{2x + 3} < 600 \quad \Rightarrow \quad 1100x + 120000 < 600 \cdot (2x + 3) \quad (2x + 3 \text{ positiv für } x > 50)$$

$$\Rightarrow 1100x + 120000 < 1200x + 1800 \quad \Rightarrow 100x > 118200 \quad \Rightarrow x > 1182$$

Ab 1183 Geräte betragen die Herstellungskosten unter 600 €

2.2

$$k'(x) = \frac{1100(2x+3) - (1100x+120000) \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{-236700}{(2x+3)^2}$$

$$k'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -236700 = 0 \quad (f) \quad \Rightarrow \quad \text{kein Extremum}$$

$k'$  negativ für alle  $x > 50$ , da Zähler immer negativ und Nenner immer positiv

Herstellungskosten streng monoton fallend für  $x > 50$

2.3

$$k'(100) = -5,74 \quad k'(1000) = -0,06$$

Bei der Herstellung von einem Gerät mehr vermindern sich die Herstellungskosten

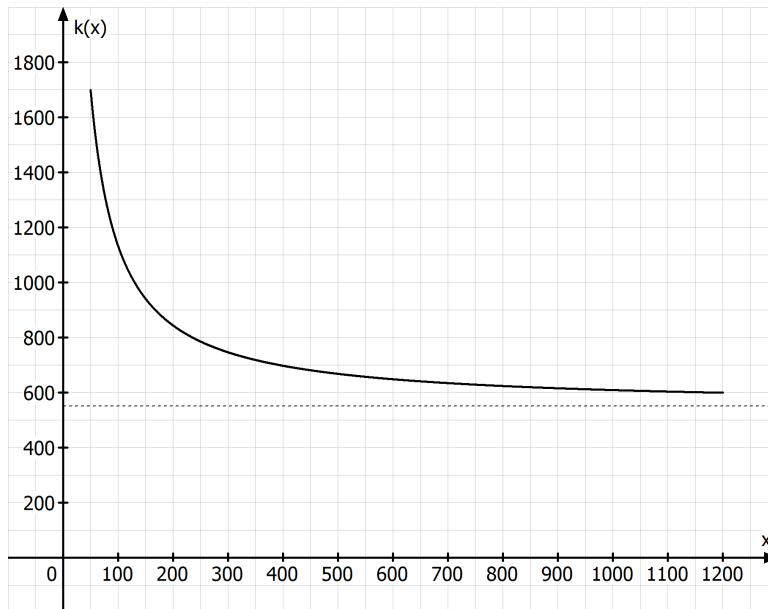
je Gerät bei 100 Geräten um 5,74 € pro Stück und bei 1000 Geräten um 0,06 € pro Stück.

2.4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1100x + 120000}{2x + 3} = \frac{1100}{2} = 550 \quad (\text{weil Zählergrad} = \text{Nennergrad})$$

Die Herstellungskosten nähern sich für sehr große Stückzahlen 550 € pro Stück an.

2.5



3.1

$$S(t) = \frac{-36t}{t^2 + 16} + 6 \quad t \geq 0$$

$$S(0) = 6 \Rightarrow \text{zu Beginn beträgt der Sauerstoffgehalt } 6 \text{ mg/l}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{-36t}{t^2 + 16} + 6 \right) = 6 \Rightarrow \text{der Sauerstoffgehalt wird sich langfristig auf } 6 \text{ mg/l einstellen}$$

3.2

$$S'(t) = \frac{-36 \cdot (t^2 + 16) - (-36t) \cdot 2t}{(t^2 + 16)^2} = \frac{36t^2 - 576}{(t^2 + 16)^2}$$

$$S'(t) = 0 \Rightarrow 36t^2 - 576 = 0 \Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow (t_1 = -4) \notin D \quad t_2 = 4$$

Skizze von  $S$ : Nenner immer positiv

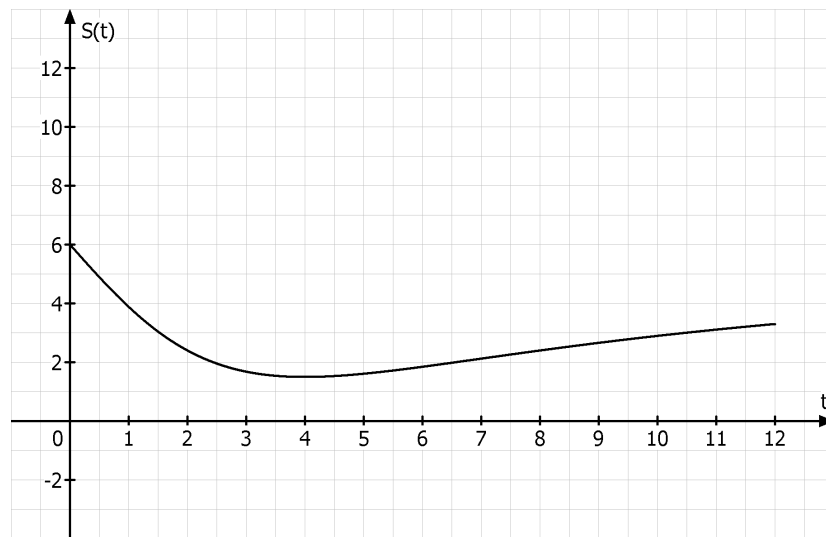
Skizze von  $(36t^2 - 576)$ :

$$\Rightarrow G_s \text{ sms in } [4; \infty[ \quad G_s \text{ smf in } [0; 4]$$

$$\Rightarrow t = 4 \text{ Minimum} \Rightarrow \text{Min}(4/1,5)$$

Der Sauerstoffgehalt ist nach vier Tagen mit 1,5 mg/l am geringsten.

3.3



3.4

$$\frac{-36t}{t^2+16} + 6 \leq 3 \Rightarrow \frac{-36t}{t^2+16} \leq -3 \Rightarrow -36t \leq -3t^2 - 48 \quad (t^2 + 16 \text{ immer positiv})$$

$$\Rightarrow -3t^2 + 36t - 48 \geq 0$$

$$\Rightarrow -3t^2 + 36t - 48 = 0 \Rightarrow t_1 = 6 - 2\sqrt{5} \quad t_2 = 6 + 2\sqrt{5}$$

Skizze von  $(-3t^2 + 36t - 48)$ :

$\Rightarrow$  nach 1,5 Tagen ist ein Fischsterben zu erwarten und nach 10,5  
 Tagen ist ein Überleben wieder möglich;

4.1  $\lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{5}{3} \pi r^2 + \frac{200}{r} \right)$  existiert nicht  $O(r) \rightarrow \infty$  für  $r \rightarrow 0$

4.2

$$O'(r) = \frac{10}{3} \pi r - \frac{200}{r^2}$$

$$O'(r) = 0 \Rightarrow \frac{10}{3} \pi r - \frac{200}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{\frac{3}{10} \cdot 200}{\pi} = \frac{60}{\pi} \Rightarrow r \approx 2,67$$

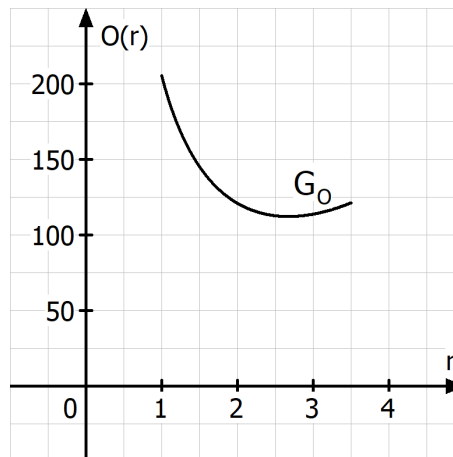
$$O''(r) = \frac{10}{3} \pi + \frac{400}{r^3} \Rightarrow O''(2,67) > 0 \Rightarrow r = 2,67 \text{ Minimum}$$

Da  $O$  im Bereich  $]0; 3,5]$  nur ein Extremum (Minimum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow r = 2,67$  absolutes Minimum

$$O_{\min} = O(2,67) \approx 112,23$$

4.3

r	1	1,5	2	2,5	3	3,5
O(r)	205,24	145,11	120,94	112,72	113,79	121,28



4.4

$$O(2) \approx 120,94$$

$$\frac{O(2)}{O_{\min}} = \frac{120,94}{112,23} = 1,0776$$

⇒ Mehrbedarf etwa 7,76%

O(r) liegt für alle  $r \in [2; 3,5]$  höchstens bei  $O(3,5) = 121,28$  und damit ist der Mehrbedarf immer kleiner oder gleich 8,06%, also auf jeden Fall kleiner als 10%.

5.1

$$F = (4a+1) \cdot (h+2 \cdot 0,5a+2 \cdot 1) = (4a+1) \cdot (h+a+2)$$

$$V = a^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{a^2} = \frac{1000}{a^2}$$

$$\Rightarrow F(a) = (4a+1) \cdot \left( \frac{1000}{a^2} + a + 2 \right) = \frac{4000}{a} + 4a^2 + 8a + \frac{1000}{a^2} + a + 2 =$$

$$4a^2 + 9a + 2 + \frac{4000}{a} + \frac{1000}{a^2} \text{ mit } a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$$

5.2

$$\frac{dF(a)}{da} = 8a + 9 - \frac{4000}{a^2} - \frac{2000}{a^3}$$

$$\Rightarrow 8a + 9 - \frac{4000}{a^2} - \frac{2000}{a^3} = 0 \Rightarrow 8a^4 + 9a^3 - 4000a - 2000 = 0$$

### 5.3

$$\frac{dF(a)}{da} = 0 \Rightarrow a \approx 7,75 \text{ einziges Extremum nach Voraussetzung}$$

Art des Extremums:

$$\frac{d^2F(a)}{da^2} = 8 + \frac{8000}{a^3} + \frac{6000}{a^4}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2F(a)}{da^2} \Big|_{a=7,75} > 0 \Rightarrow \text{relatives Minimum für } a=7,75$$

Da  $F(a)$  nur einen relativen Extremwert (Minimum) besitzt, tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf und damit ist  $a = 7,75$  absolutes Minimum.

$$\Rightarrow h = \frac{1000}{(7,75)^2} \approx 16,65$$

Abmessungen des Kartons:  $l = 4 \cdot 7,75 + 1 = 32 \text{ cm}$      $b = 16,65 + 7,75 + 2 = 26,4 \text{ cm}$

### 6.1

Silo mit Halbkugel:

$$O(r, h) = r^2\pi + 2r\pi h + 2r^2\pi = 3r^2\pi + 2r\pi h$$

$$V = r^2\pi h + \frac{2}{3}r^3\pi \Rightarrow r^2\pi h = 100 - \frac{2}{3}r^3\pi \Rightarrow h = \frac{100 - \frac{2}{3}r^3\pi}{r^2\pi}$$

$$\Rightarrow O(r) = 3r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{100 - \frac{2}{3}r^3\pi}{r^2\pi} = 3r^2\pi + \frac{200}{r} - \frac{4}{3}r^2\pi = \frac{5}{3}r^2\pi + \frac{200}{r}$$

$$h = \frac{100 - \frac{2}{3}r^3\pi}{r^2\pi} > 0 \Rightarrow 100 - \frac{2}{3}r^3\pi > 0 \Rightarrow r^3 < \frac{150}{\pi} \Rightarrow r < \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}} \Rightarrow r < 3,63$$

$$\Rightarrow D_o = ]0; 3,63[$$

$$O'(r) = \frac{10}{3}r\pi - \frac{200}{r^2} \Rightarrow \frac{10}{3}r\pi - \frac{200}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{60}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}} = 2,67$$

$$O''(r) = \frac{10}{3}\pi + \frac{400}{r^3} \quad O''(2,67) > 0 \Rightarrow r = 2,67 \text{ Minimum}$$

Da  $O$  im Bereich  $]0; 3,63[$  nur ein Extremum (Minimum) besitzt,

tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$\Rightarrow r = 3,63$  absolutes Minimum

$$\Rightarrow O(2,67) = 112,23 \text{ m}^2$$



Silo mit Kegel:

$$O(r, h) = r^2\pi + 2r\pi h_z + r\pi \cdot \sqrt{r^2 + h_k^2} = r^2\pi + 2r\pi h_z + r\pi \cdot \sqrt{2r^2}$$

$$V = r^2\pi h_z + \frac{1}{3}r^2\pi h_k = r^2\pi h_z + \frac{1}{3}r^3\pi \Rightarrow r^2\pi h_z + \frac{1}{3}r^3\pi = 100$$

$$\Rightarrow h_z = \frac{100 - \frac{1}{3}r^3\pi}{r^2\pi}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow O(r) &= r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{100 - \frac{1}{3}r^3\pi}{r^2\pi} + r\pi \cdot \sqrt{2r^2} = r^2\pi + \frac{200}{r} - \frac{2}{3}r^2\pi + \sqrt{2}r^2\pi = \\ &= r^2\pi \left( \frac{1}{3} + \sqrt{2} \right) + \frac{200}{r} \end{aligned}$$

$$h_z = \frac{100 - \frac{1}{3}r^3\pi}{r^2\pi} > 0 \Rightarrow 100 - \frac{1}{3}r^3\pi > 0 \Rightarrow r^3 < \frac{300}{\pi} \Rightarrow r < \sqrt[3]{\frac{300}{\pi}} \approx 4,57$$

$$\Rightarrow D_o = ]0; 4,57[$$

$$O'(r) = 2r\pi \left( \frac{1}{3} + \sqrt{2} \right) - \frac{200}{r^2} \Rightarrow 2r\pi \left( \frac{1}{3} + \sqrt{2} \right) - \frac{200}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{200}{2\pi \left( \frac{1}{3} + \sqrt{2} \right)} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{200}{2\pi \left( \frac{1}{3} + \sqrt{2} \right)}} \approx 2,63$$

$$O''(r) = 2\pi \left( \frac{1}{3} + \sqrt{2} \right) + \frac{400}{r^3} \quad O''(2,63) > 0 \Rightarrow r = 2,63 \text{ Minimum}$$

Da  $O$  im Bereich  $]0; 4,57[$  nur ein Extremum (Minimum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  
 $\Rightarrow r = 2,63$  absolutes Minimum

$$O(2,63) = 114,02 \text{ m}^2$$

$\Rightarrow$  Beim Silo mit der Halbkugel ist der Bedarf an Edelstahlblech etwas geringer.

## 6.2

Kosten für Silo mit Halbkugel:

$$K(r) = 2 \cdot 0,5 \cdot 4r^2\pi + 2r\pi h + r^2\pi = 5r^2\pi + 2r\pi h$$

$$\text{mit } h = \frac{100 - \frac{2}{3}r^3\pi}{r^2\pi} \text{ folgt: } K(r) = 5r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{100 - \frac{2}{3}r^3\pi}{r^2\pi} = \frac{11}{3}r^2\pi + \frac{200}{r}$$

$$K'(r) = \frac{22}{3}r\pi - \frac{200}{r^2} \quad \frac{22}{3}r\pi - \frac{200}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{300}{11\pi}} \approx 2,06$$

$$K''(r) = \frac{22}{3}\pi + \frac{400}{r^3} \Rightarrow K''(2,06) > 0 \Rightarrow r = 2,06 \text{ Minimum}$$

Da  $K$  im Definitionsbereich nur ein Extremum (Minimum) besitzt,

tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$\Rightarrow r = 2,06$  absolutes Minimum

$$K(2,06) \approx 146,0 \text{ GE}$$

Kosten für Silo mit Kegel:

$$K(r) = r^2\pi + 2r\pi \left( \frac{100}{r^2\pi} - \frac{r}{3} \right) + 2 \cdot r\pi \cdot \sqrt{2r^2} = r^2\pi + \frac{200}{r} - \frac{2}{3}r^2\pi + 2 \cdot r^2\pi \cdot \sqrt{2} =$$

$$= r^2\pi \left( \frac{1}{3} + 2\sqrt{2} \right) + \frac{200}{r}$$

$$K'(r) = 2r\pi \left( \frac{1}{3} + 2\sqrt{2} \right) - \frac{200}{r^2} \Rightarrow 2r\pi \left( \frac{1}{3} + 2\sqrt{2} \right) - \frac{200}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{200}{2\pi \left( \frac{1}{3} + 2\sqrt{2} \right)}} \approx 2,16$$

$$K''(r) = 2\pi \left( \frac{1}{3} + 2\sqrt{2} \right) + \frac{400}{r^3} \Rightarrow K''(2,16) > 0 \Rightarrow r = 2,16 \text{ Minimum}$$

Da  $K$  im Definitionsbereich nur ein Extremum (Minimum) besitzt,

tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$\Rightarrow r = 2,16$  absolutes Minimum

$$K(2,16) \approx 138,9 \text{ GE}$$

Damit ist das Silo mit Kegel zu bevorzugen.

### 7.1

Senkrechte Asymptote:  $x = -1$     Schiefe Asymptote:  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{8}{x+1} = 0 \Rightarrow 8 = 0 \text{ (f)}$$

$\Rightarrow G_f$  schneidet die schiefe Asymptote nicht

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{8}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{8}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 16$$

$$\Rightarrow x+1 = \pm 4 \Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -5$$

$$f''(x) = \frac{16}{(x+1)^3} \Rightarrow f''(3) > 0 \Rightarrow \text{TIP} \quad f''(-5) < 0 \Rightarrow \text{HOP}$$

TIP(3|3)    HOP(-5|-5)

### 7.2

$$g(-x) = \frac{1}{2}(-x) + \frac{8}{(-x)} = -\frac{1}{2}x - \frac{8}{x} = -g(x)$$

$\Rightarrow G_g$  ist punktsymmetrisch zum Ursprung und damit

$G_f$  punktsymmetrisch zum Punkt  $P(-1|-1)$

### 7.3.1

$$f(0) = 7,5 \quad f(15) = 7,5$$

Eine leere und eine vollständig gefüllte Dose besitzen beide den Schwerpunkt  $S$  genau in der Mitte der Dose bei 7,5 cm.

7.3.2 Wird in die leere Dose kontinuierlich Flüssigkeit geschüttet, so sinkt der Schwerpunkt von 7,5 cm bis zum tiefsten Wert von 3 cm ab, der bei einer Füllhöhe von 3 cm erreicht ist. Anschließend steigt der Schwerpunkt wieder an bis er wieder 7,5 cm erreicht hat, wenn die Dose vollständig gefüllt ist.

### 7.3.3

$$f(x) \leq 5 \Rightarrow x \in [0,5; 9,5] \text{ (nach Zeichnung)}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} \leq 5 \Rightarrow 0,5x - 5,5 + \frac{8}{x+1} \leq 0$$

$$\Rightarrow 0,5x(x+1) - 5,5(x+1) + 8 \leq 0 \quad (\text{da } 0 \leq x \leq 15 \text{ nach Voraussetzung})$$

$$\Rightarrow 0,5x^2 - 5x + 2,5 \leq 0$$

$$\Rightarrow 0,5x^2 - 5x + 2,5 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 + 2\sqrt{5} \quad x_2 = 5 - 2\sqrt{5}$$

Skizze von  $(0,5x^2 - 5x + 2,5)$ :

$$\Rightarrow x \in [5 - 2\sqrt{5}; 5 + 2\sqrt{5}]$$

### 8.1

$$(I) \quad k(10) = 17500 \Rightarrow \frac{10a + 100000}{5 + b} = 17500$$

$$(II) \quad k(20) = 15000 \Rightarrow \frac{20a + 100000}{10 + b} = 15000$$

$$(I) \Rightarrow 10a + 100000 = 87500 + 17500b \Rightarrow a = -1250 + 1750b$$

$$(II) \Rightarrow 20a + 100000 = 150000 + 15000b$$

$$\Rightarrow 20(-1250 + 1750b) + 100000 = 150000 + 15000b$$

$$\Rightarrow 75000 + 35000b = 150000 + 15000b \Rightarrow b = 3,75$$

$$\Rightarrow a = -1250 + 1750 \cdot 3,75 = 5312,50$$

### 8.2

$$\frac{5312,5x + 100000}{0,5x + 3,75} < 12000$$

$$\Rightarrow 5312,5x + 100000 < 6000x + 45000 \quad (0,5x + 3,75 > 0)$$

$$\Rightarrow 55000 < 687,5x \Rightarrow x > 80$$

$\Rightarrow$  Es müssen mindestens 81 Tauchroboter gefertigt werden.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5312,5x + 100000}{0,5x + 3,75} \right) = \frac{5312,5}{0,5} = 10625 \quad (\text{da Zählergrad} = \text{Nennergrad})$$

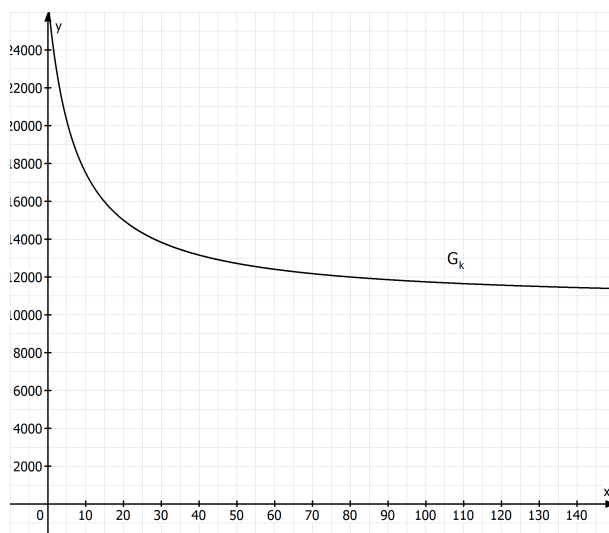
Die Stückkosten nähern sich für sehr große Produktionszahlen 10625 € an.

### 8.3

$$\begin{aligned}
 k'(x) &= \frac{5312,5 \cdot (0,5x + 3,75) - (5312,5x + 100000) \cdot 0,5}{(0,5x + 3,75)^2} = \\
 &= \frac{-30078,125}{(0,5x + 3,75)^2} < 0
 \end{aligned}$$

Die Stückkosten nehmen mit steigender Produktionszahl streng monoton ab.

### 8.4



8.5

$$k(300) = \frac{5312,5 \cdot 300 + 100000}{0,5 \cdot 300 + 3,75} = 11016,26$$

$$\Rightarrow G(x) = 300 \cdot 15000 - 300 \cdot 11016,26 = 1195122$$

Das Unternehmen würde einen Gewinn von etwa 1,2 Millionen Euro machen.

$$G(x) > 0 \Rightarrow x \cdot 15000 - 300 \cdot 11016,26 > 0 \Rightarrow x > 220,33$$

Es müssen mindestens 221 Roboter verkauft werden, damit das Unternehmen einen Gewinn erzielt.

8.6  $p \cdot 300 - 11016,26 \cdot 300 = 500000 \Rightarrow p \approx 12682,93 \text{ €}$

8.7

$$x \cdot 11000 - k(x) \cdot x > 0 \Rightarrow k(x) < 11000$$

$$\Rightarrow \frac{5312,5x + 100000}{0,5x + 3,75} < 11000$$

$$\Rightarrow 5312,5x + 100000 < 5500x + 41250 \Rightarrow x > 313,33$$

Es müssen mindestens 314 Roboter hergestellt und verkauft werden.

9.1

$$w(2) = 32,5$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{10(t^2 - 9t + 40)}{t^2 - 8t + 20} \right) = 10 \quad (\text{da Zählergrad} = \text{Nennergrad})$$

9.2

$$\begin{aligned}
 w'(t) &= \frac{10 \cdot (2t - 9) \cdot (t^2 - 8t + 20) - (10t^2 - 90t + 40) \cdot (2t - 8)}{(t^2 - 8t + 20)^2} = \\
 &= \frac{20t^3 - 160t^2 + 400t - 90t^2 + 720t - 1800 - (20t^3 - 80t^2 - 180t^2 + 720t + 800t - 3200)}{(t^2 - 8t + 20)^2} = \\
 &= \frac{10t^2 - 400t + 1400}{(t^2 - 8t + 20)^2}
 \end{aligned}$$

$$w'(t) = 0 \Rightarrow 10t^2 - 400t + 1400 = 0 \Rightarrow t_1 \approx 36,12 \quad t_2 \approx 3,88$$

Skizze von  $w'$ : Nenner immer positiv

Skizze von  $(10t^2 - 400t + 1400)$ :

$$\Rightarrow t = 3,88 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(3,88 | 50,16) \quad t = 36,12 \text{ TIP}$$

3,88 Minuten nach Beobachtungsbeginn fließt an der Messstelle

die maximale Wassermenge pro Minute von  $50,16 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$  vorbei.

9.3

$$\begin{aligned}w''(t) &= \frac{(20t - 400) \cdot (t^2 - 8t + 20)^2 - (10t^2 - 400t + 1400) \cdot 2 \cdot (t^2 - 8t + 20) \cdot (2t - 8)}{(t^2 - 8t + 20)^4} = \\&= \frac{(20t - 400) \cdot (t^2 - 8t + 20) - (10t^2 - 400t + 1400) \cdot 2}{(t^2 - 8t + 20)^3} = \\&= \frac{20(t^3 - 60t^2 + 420t - 720)}{(t^2 - 8t + 20)^3}\end{aligned}$$

$$w''(t) = 0 \Rightarrow 20(t^3 - 60t^2 + 420t - 720) = 0 \Rightarrow t_1 \approx 2,73 \quad t_2 \approx 5,05 \quad t_3 \approx 52,22$$

Nach 2,73 Minuten steigt der Wasserdurchfluss an der Beobachtungsstelle am stärksten an.

Nach 5,05 Minuten fällt der Wasserdurchfluss an der Beobachtungsstelle am stärksten ab.

Die Wendestelle bei  $t = 52,22$  ist im Sachzusammenhang nicht relevant.

9.4

$$\int_0^8 w(t) dt \approx 260$$

$\Rightarrow$  in den ersten acht Minuten fließen an der Beobachtungsstelle etwa  $260 \text{ m}^3$  Wasser vorbei.

10.1

$$s(0) = 10$$

Der Sauerstoffgehalt im See beträgt zu Beginn  $10 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ .

10.2

$$s'(t) = \frac{(20t-10) \cdot (t^2+6) - (10t^2-10t+60) \cdot 2t}{(t^2+6)^2} = \frac{10t^2-60}{(t^2+6)^2}$$

$$s'(t) = 0 \Rightarrow 10t^2 - 60 = 0 \Rightarrow t^2 = 6 \Rightarrow t_1 \approx 2,45 \quad (t_2 \approx -2,45) \notin D$$

$$s''(t) = \frac{20t \cdot (t^2+6)^2 - (10t^2-60) \cdot 2 \cdot (t^2+6) \cdot 2t}{(t^2+6)^4} = \frac{20t \cdot (t^2+6) - (10t^2-60) \cdot 2 \cdot 2t}{(t^2+6)^3} =$$

$$= \frac{-20t^3 + 360t}{(t^2+6)^3}$$

$$s''(2,45) > 0 \Rightarrow t = 2,45 \text{ TIP TIP}(2,45 | 7,96)$$

Nach 2,45 Tagen ist der Sauerstoffgehalt im See mit  $7,96 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$  am geringsten.

10.3

$$s''(t) = \frac{-20t^3 + 360t}{(t^2+6)^3} = 0 \Rightarrow -20t^3 + 360t = 0$$

$$\Rightarrow -20t \cdot (t^2 - 18) = 0 \Rightarrow (t_1 = 0) \notin D \quad (t_2 = -\sqrt{18}) \notin D \quad t_3 = \sqrt{18} \approx 4,24$$

Skizze von  $s''$ : Nenner immer positiv

Skizze von  $(-20t^3 + 360t)$ :

$$\Rightarrow t = 4,24 \text{ Wendestelle}$$

$$s(4,74) - s(3,74) \approx 0,21$$

Um die Wendestelle beträgt der stärkste tägliche Zuwachs des Sauerstoffgehalts im See etwa  $0,21 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ .

10.4

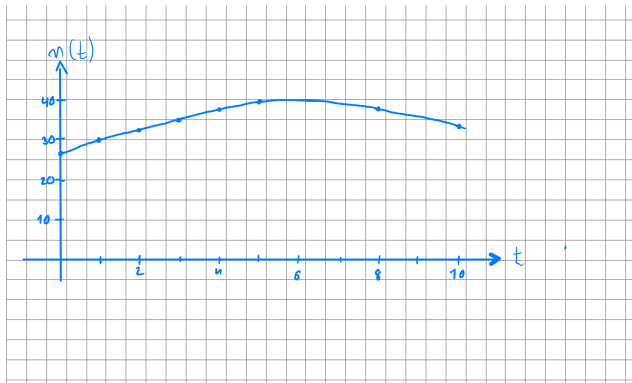
$$0,9 \cdot s(0) = 9$$

$$\Rightarrow \frac{10(t^2 - t + 6)}{t^2 + 6} = 9 \Rightarrow 10t^2 - 10t + 60 = 9t^2 + 54 \Rightarrow t^2 - 10t + 6 = 0$$

$$\Rightarrow t_1 \approx 9,36 \quad t_2 \approx 0,64$$

$\Rightarrow$  Der Sauerstoffgehalt ist nach etwa 9,36 Tagen wieder auf 90 % des ursprünglichen Wertes angestiegen.

### 11.1



Hypothese: Die Verkaufszahlen sinken auch nach 10 Jahren weiter und auf lange Sicht werden kaum noch Bücher verkauft werden.

### 11.2.1

t	0	1	2	3	4	5	8	10
u(t)	25,7	28,5	31,3	33,9	36,1	37,5	36,1	31,3
n(t)	26,8	30,0	32,3	35,0	37,5	39,5	37,6	33,2
o(t)	28,4	31,5	34,6	37,5	39,9	41,4	39,9	34,6

Alle Werte von  $n(t)$  liegen zwischen  $u(t)$  und  $o(t)$  und somit kann die Funktion  $v$  als geeignet angesehen und als realitätsnah bezeichnet werden.

### 11.2.2

$$\frac{3000}{t^2 - 12t + 111} = 4 \Rightarrow 3000 = 4t^2 - 48t + 444 \Rightarrow 4t^2 - 48t - 2556 = 0$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{48 \pm \sqrt{2304 - 4 \cdot 4 \cdot (-2556)}}{8} = \frac{48 \pm \sqrt{43200}}{8} \Rightarrow t_1 \approx 31,98 \quad (t_2 \approx -19,98) \notin D$$

In der 32. Woche werden etwa 4000 Bücher verkauft.

### 11.2.3

$$v(t) = \frac{-3000 \cdot (2t - 12)}{(t^2 - 12t + 111)^2}$$

$$v(t) = 0 \Rightarrow -3000 \cdot (2t - 12) = 0 \Rightarrow 2t - 12 = 0 \Rightarrow t = 6$$

Skizze von  $v$ : Nenner immer positiv

Skizze Zähler:

$$\Rightarrow t = 6 \text{ HOP } \text{HOP}(6|40)$$

In der 6. Woche werden mit 40000 Stück die meisten Bücher verkauft.



12.1

$$A(11,37) = \frac{3}{4}\sqrt{3} \cdot 11,37^2 + \frac{8000\sqrt{3}}{9 \cdot 11,37} \approx 303,34 \approx 303$$

$$A(6,00) = \frac{3}{4}\sqrt{3} \cdot 6,00^2 + \frac{8000\sqrt{3}}{9 \cdot 6,00} \approx 303,37 \approx 303$$

Ausschlaggebende Gründe: Optik; Stabilität; .....

12.2

$$A'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot x + \frac{0 \cdot 9x^2 - 8000\sqrt{3} \cdot 9}{(9x)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot x + \frac{-8000\sqrt{3} \cdot 9}{81x^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot x + \frac{-8000\sqrt{3}}{9x^2}$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot x + \frac{-8000\sqrt{3}}{9x^2} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot x = \frac{8000\sqrt{3}}{9x^2} \Rightarrow \frac{27}{2}\sqrt{3} \cdot x^3 = 8000\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{1600}{27} \Rightarrow x \approx 8,40$$

Vorzeichenuntersuchung von  $A'(x)$ :

$$x=5 \quad x=8,40 \quad x=10$$

$\Rightarrow x = 8,40$  Minimum

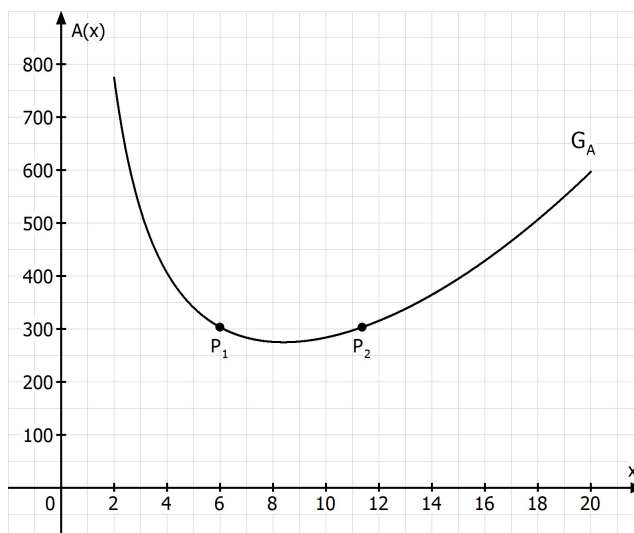
Da  $G_A$  im Bereich  $[2;20]$  nur ein Extremum (Minimum) besitzt, tritt in diesem

Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$\Rightarrow x = 8,40$  absolutes Minimum

$$A(8,40) \approx 274,95$$

12.3



12.4

$$\left(h_{\text{Trapez}}\right)^2 + 4^2 = 8^2 \quad \Rightarrow h_{\text{Trapez}} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$$

$$G = \frac{16+8}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h_{\text{Schachtel}} = \frac{V}{G} = \frac{400}{48\sqrt{3}} \approx 4,81$$

Die Höhe beträgt ca. 8,41 cm.